

CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS DOS *BERNOULLI* E A DESCOBERTA DA CONSTANTE DE EULER



BERNOULLI'S SCIENTIFIC CONTRIBUTIONS AND THE DISCOVERY OF EULER'S CONSTANT

ALLAN VICTOR SOARES DA PAZ PEREIRA

Graduação em Licenciatura em Matemática (2016) e Física (2021) pela Universidade de Franca. Professor de Ensino Fundamental II e Médio – Matemática.

RESUMO

Este artigo teve como principal objetivo realizar um breve estudo acerca das contribuições científicas dos *Bernoulli*, com foco na descoberta da constante de Euler ou Napier, utilizada em diversos estudos e aplicações que envolvem matemática e física. O procedimento metodológico utilizado foi a pesquisa bibliográfica. Como principal resultado, foi verificado que o uso da história da matemática pode ser uma estratégia interessante para o docente contextualizar os objetos de conhecimento abordados, o que poderia tornar as aulas de matemática mais significativas para os estudantes.

Palavras-chave: *Bernoulli*; Constante de Euler; História da Matemática.

ABSTRACT

The main objective of this article is to briefly study the scientific contributions of Bernoulli, with a focus on the discovery of the Euler or Napier constant, which is used in various studies and applications involving mathematics and physics. The methodological procedure used was bibliographical research. The main result was that the use of the history of mathematics can be an interesting strategy for teachers to contextualize the objects of knowledge covered, which could make mathematics lessons more meaningful for students.

Keywords: Bernoulli; Euler's constant; History of mathematics.

INTRODUÇÃO

O presente artigo busca fazer um breve estudo acerca das contribuições científicas dos *Bernoulli*, com foco na descoberta da constante de Euler ou Napier, o que poderia contribuir para contextualizar temas abstratos e complexos, como estudos estatísticos de decaimento ou crescimento populacional e dos juros compostos utilizados em matemática e educação financeira.

Como o nome *Bernoulli* é associado a várias descobertas científicas, é importante que os estudantes saibam que vários membros de uma mesma família contribuíram para tais feitos.

Portanto, este artigo busca responder sobre quais foram as contribuições científicas de alguns membros da família *Bernoulli* para a ciência, com foco na descoberta da constante de Euler.

Para responder a essa problemática, foi utilizada a pesquisa bibliográfica como procedimento metodológico.

O principal objetivo deste artigo é mostrar as diversas contribuições dos membros da família *Bernoulli* para o desenvolvimento científico, principalmente nas áreas de matemática e física.

A principal justificativa para esta pesquisa é a necessidade de contextualizar os objetos de conhecimento estudados na sala de aula e a história da matemática poderia ser uma estratégia relevante para tornar a aula mais significativa para os estudantes.

OS BERNOULLI

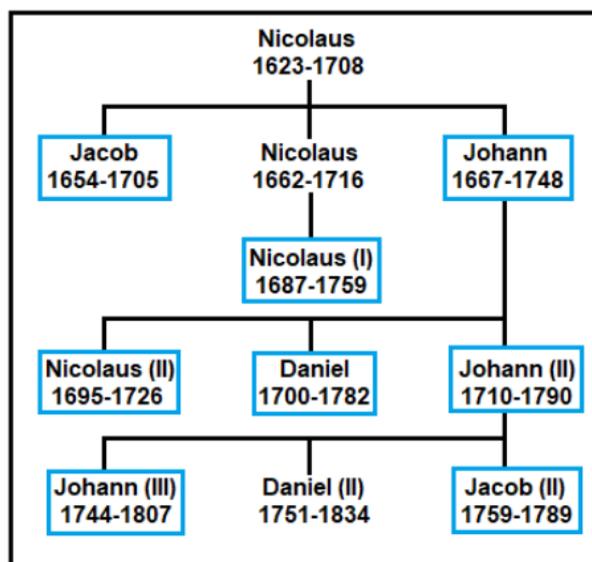
Antes de adentrar ao problema deste tópico, foi interessante observar que o sobrenome *Bernoulli* está relacionado a uma série de estudos da matemática e da física. É comum pensar que todos esses estudos e descobertas científicas remetem a um único pesquisador, de sobrenome *Bernoulli*.

De toda forma, é importante observar que esses estudos partiram de vários membros de uma mesma família, a família *Bernoulli*.

Embora todas as contribuições de cada membro da família *Bernoulli* devam ser reconhecidas, não significa dizer que outros matemáticos tiveram pouca influência na história dessas investigações e descobertas. Na realidade, as descobertas dos *Bernoulli* foram influenciadas por matemáticos como Descartes, Newton e Leibniz, entre outros.

O Quadro 1 apresenta parte da árvore genealógica da família *Bernoulli*, em que os destacados em azul representam os oito membros notáveis dessa família por estudos nos campos da matemática e física.

Quadro 1: Oito membros da família *Bernoulli* que se destacaram na matemática e física.



Fonte: Clube de Matemática da OBMEP (2020).

O membro da família *Bernoulli* que mais chama atenção para tópicos de matemática em educação financeira é Jacob Bernoulli (1.654 - 1.705), devido à solução de um problema sobre capitalização composta que será descrito com maiores detalhes nesta pesquisa.

A Figura 1 traz uma imagem de Jacob, segundo a biografia disponibilizada pela Escola de Matemática e Estatística da *University of St Andrews*, Escócia.

Figura 1: Ilustração de Jacob Bernoulli (1.654 - 1.705).



Fonte: O'CONNOR & ROBERTSON (1998).

Os relatos, a seguir, foram inspirados e traduzidos a partir da biografia de Jacob Bernoulli, principalmente as produzidas por O'Connor & Robertson (1998) e pelo clube de matemática da OBMEP (2020).

Nicolaus Bernoulli, pai de Jacob Bernoulli, foi um importante cidadão de Basileia, sendo membro da câmara municipal e magistrado. A mãe de Jacob Bernoulli também vinha de uma importante família de banqueiros e conselheiros locais da Basileia. Jacob Bernoulli era irmão de Johann Bernoulli e tio de Daniel Bernoulli. Como a família de Nicolaus Bernoulli tinha condições para

financiar os estudos de seus filhos, Jacob e Daniel puderam dedicar-se à vida acadêmica (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

No caso de Jacob Bernoulli, seus pais o obrigaram a trilhar caminhos de estudos nos campos da filosofia e teologia, obtendo grau de mestrado em filosofia pela Universidade de Basileia em 1.671 e licenciatura em teologia em 1.676, na mesma universidade (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

Durante o tempo em que Jacob Bernoulli se formava em filosofia, também dedicava tempo às investigações em matemática e astronomia, mesmo contra a vontade de seus pais. Pode-se observar que esse era um padrão típico de muitos da família *Bernoulli* que empenharam energia em pesquisas nos campos da matemática e física, mesmo com a pressão da família que os direcionava para outras carreiras. No entanto, Jacob Bernoulli foi o primeiro a romper essas barreiras de tradição familiar. Assim, é possível inferir que Jacob Bernoulli influenciou a geração de matemáticos e físicos de sua família (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

Em 1.676, depois de se formar em teologia, Bernoulli mudou-se para Genebra, onde trabalhou como tutor. Ele então viajou para a França passando dois anos estudando com os seguidores de Descartes que eram liderados nessa época por Malebranche, um filósofo da linha racionalista e padre francês. Em 1.681, Bernoulli viajou para a Holanda, onde conheceu muitos matemáticos, incluindo Hudde. Continuando seus estudos com os principais matemáticos e cientistas da Europa, ele foi para a Inglaterra onde, entre outros, conheceu Boyle e Hooke. Como resultado de suas viagens e pesquisas, Bernoulli manteve contato com os estudos de muitos matemáticos famosos, como artigos e documentos publicados sobre Leibniz nos trabalhos de cálculo infinitesimal (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

Jacob Bernoulli retornou à Suíça e ensinou mecânica na Universidade de Basileia a partir de 1.683, dando uma série de importantes palestras sobre a mecânica dos sólidos e líquidos. Como seu diploma era em teologia, seria natural que ele se voltasse para a Igreja, mas, embora lhe oferecessem um cargo na linha eclesiástica, ele recusou. As verdadeiras paixões de Jacob Bernoulli reverberaram na matemática e física teórica e foi nesses tópicos que ele ensinou e pesquisou. Durante este período, ele estudou as principais obras matemáticas de seu tempo, incluindo *La Géométrie* de René Descartes e *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus* de Leibniz. Neste sentido, Jacob foi um dos primeiros matemáticos a tentar entender e aplicar os teoremas sobre o cálculo infinitesimal de Leibniz, deixando um legado importante nesta área do conhecimento matemático (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

Em 1.689, Jacob Bernoulli publicou sua lei dos grandes números (LGN), em teoria da probabilidade. A interpretação da probabilidade como frequência relativa diz que, se um experimento for repetido muitas vezes, a frequência relativa com que um evento ocorre é cada vez mais próxima da probabilidade real do evento. Jacob Bernoulli também publicou tratados sobre séries infinitas entre os anos 1.682 e 1.704. Jacob concluiu que a série harmônica, $\sum(1/n)$, diverge, resultado que já havia sido comprovado por outros matemáticos como Pietro Mengoli (1.626 - 1.686), cerca de 40 anos antes. Mas, que a série $\sum(1/n^2)$ convergia para um valor menor que 2, apesar de não provar esse

fato, demonstrado posteriormente por Leonhard Euler (1.707 - 1.783). Destes trabalhos sobre séries infinitas, surgiu a expressão, escrita com a simbologia atual, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, mais conhecida como desigualdade de Bernoulli. Em 1.690, mostrou que a solução do problema da corrente suspensa consistia em determinar a curva isócrona, também conhecido como braquistócrona, é equivalente a resolver uma equação diferencial não linear de primeira ordem (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

A braquistócrona deriva das palavras gregas *brachistos*, que significa menor, e *chronos*, que significa tempo. Dessa forma, a braquistócrona é um problema que envolve conceitos de física mecânica e geometria, para determinar o que alguns autores nomeiam de curva isócrona, ou curva de descida mais rápida. Um objeto se move por essa curva, com peso próprio, inicia o movimento no ponto mais alto da curva e verificasse a trajetória em que ele se move com maior velocidade, entre dois pontos a diferentes distâncias na horizontal e não na mesma linha na vertical (TAGLIOLATTO, 2015).

A isócrona é a curva ao longo da qual uma partícula descera sob aceleração da gravidade a partir de qualquer ponto, até o ponto mais baixo da curva, exatamente no mesmo tempo (ou com intervalos de tempos iguais), não importa qual seja o ponto de partida. Ela havia sido estudada por Huygens em 1.687 e Leibniz em 1.689. Depois de encontrar a equação diferencial, na forma $y' = p(x)y + q(x)y^n$, Bernoulli, então, a resolveu pelo método que hoje é conhecido por separação de variáveis (O'CONNOR & ROBERTSON, 1998).

Uma das obras mais importantes de Jacob Bernoulli foi na área de probabilidade, intitulada *Ars Conjectandi*, que ainda oferece interesse prático para aplicações em sistemas de seguros financeiros e análises probabilísticas. Jacob é considerado como importante personagem na matemática por motivar o uso da teoria do cálculo infinitesimal desenvolvida primeiramente por Leibniz, na geometria, probabilidade e física, em novos problemas, muitos deles relacionados a situações da vida prática (OBMEP, 2020).

JACOB BERNOULLI E A DESCOBERTA DA CONSTANTE DE NAPIER

Durante as investigações de Jacob Bernoulli sobre a capitalização composta, percebeu-se que o limite da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182 \dots$, quando n tende ao infinito. Portanto, alguns autores atribuem a Jacob a descoberta do número irracional e , conhecido como número de Euler. Utilizando os conceitos atuais do cálculo, pode-se demonstrar, conforme Equação 1, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{Equação 1}$$

Jacob fez investigações para diferentes valores de n natural, a partir da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Com o uso de uma calculadora, foram obtidos os resultados da Tabela 1, para compreender as investigações numéricas de Jacob Bernoulli:

Tabela 1: Resultados para diferentes valores de n , a partir da expressão $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

n	$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
1	2
2	2,25
3	2,37037037037 ...
4	2,44140625
5	2,48832
6	2,521626371742 ...
7	2,546499697041 ...
8	2,56578451395
9	2,581174791713 ...
...	...
1.8000	2,718206324472 ...

Fonte: Autoria própria.

Da Tabela 1, nota-se que a partir de $n = 1.800$, obtém-se valores próximos ao que hoje conhecemos como número de Euler ou constante de Napier.

Apesar de não provar o resultado utilizando os conceitos advindos do cálculo e análise real da maneira como concebemos hoje, Jacob Bernoulli concluiu que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182 \dots$, quando n tende ao infinito, e, para ele, isso demonstrava que a referida expressão era limitada inferiormente por 2 e superiormente por um valor entre 2 e 3.

Posteriormente, Leonhard Euler, em sua obra intitulada *Introductio in analysin infinitorum*, escrita em latim e publicada em 1.748, constatou que Jacob Bernoulli estava correto, demonstrando que o número e , base dos logaritmos naturais, correspondia ao limite da sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, com n tendendo ao infinito, podendo ser representado pela série $e = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots = 2,7182 \dots$, tal que $n \in \mathbb{N}$ (FIGUEIRA, 2017).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Foi verificado que as contribuições dos *Bernoulli* e seus trabalhos em matemática e física aplicadas, permitiram expansão dos conceitos por eles estudados para diversos campos da

matemática, posteriormente, nas áreas de cálculo diferencial e integral, geometria, probabilidade, estatística e teorias de risco usadas no mercado financeiro e de seguros.

Dentre as descobertas científicas realizadas pela família *Bernoulli*, destaca-se a conhecida nos dias de hoje como número de Euler ou Napier, constante usada em diversos tópicos da física e matemática, como em modelos de crescimento e decaimento populacional, em cálculo diferencial e integral, entre outras aplicações.

Além disso, a contextualização desses conceitos, por meio da história da matemática, poderia tornar as aulas mais interessantes e significativas para os estudantes.

REFERÊNCIAS

FIGUEIRA, R. F. **O número de Euler**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT). Universidade Federal da Paraíba (UFPB). João Pessoa. 2017. 80p.

OBMEP. Clube de Matemática da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). **A família Bernoulli**. (2020). Disponível em: <<http://clubes.obmep.org.br/blog/a-familia-bernoulli/>>. Acesso 10 set.2024.

O'CONNOR, J. J.; & ROBERTSON, E. F. **Biography of Jacob Bernoulli**. (1998). *University of St Andrews, Scotland*. Disponível em: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bernoulli_Jacob/>. Acesso 5 jun.2024.

TAGLIOLATTO, A. L. S. **Braquistócrona**. Tese de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP). Rio Claro. 2015. 56p.